

Signalverarbeitung in der Nachrichtentechnik – Anwendung der DSV in der Nachrichtentechnik

Holger Jäkel

Communications Engineering Lab (CEL)



- 2 Anwendung der DSV in der Nachrichtentechnik
 - Zur Übertragungsfunktion
 - Zur Gruppenlaufzeit
 - Zum Abtasttheorem
 - Zur Faltung
 - Zum Entwurf digitaler Filter
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur



- 2 Anwendung der DSV in der Nachrichtentechnik
 - Zur Übertragungsfunktion
 - Zur Gruppenlaufzeit
 - Zum Abtasttheorem
 - Zur Faltung
 - Zum Entwurf digitaler Filter
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur

- **Definition:** Die *Übertragungsfunktion* eines LTI-Systems ist die z-Transformierte der Impulsantwort:

$$H(z) := \mathcal{Z}\{h[n]\}.$$

- **Definition:** Der *Frequenzgang* eines LTI-Systems ist

$$H(\Omega) := H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}.$$

- **Erinnerung:** Signal reell $\implies X(-\Omega) = X^*(\Omega)$
- **Anwendung:** Basisbandsignale bzw. deren modulierte Versionen im Bandpassbereich
- **Diskussion:**
 - Was bedeutet dies für die „Freiheitsgrade“ in einem solchen Signal?
 - Was bedeutet dies für die Bandbreiteneffizienz?
 - Was heißt dies für die Darstellung von Frequenzgängen bei Systemen mit reellwertiger Impulsantwort?

- **Theorem:** System kausal $\implies \operatorname{Re}\{H(\Omega)\}$ und $\operatorname{Im}\{H(\Omega)\}$ sind nicht unabhängig, sondern bestimmen sich gegenseitig.¹
- **Beweis:** Zerlege $h[n]$ in seinen geraden und ungeraden Anteil² gemäß $h[n] = h_g[n] + h_u[n]$. Da $h[n]$ kausal ist, folgt $h_g[n] = -h_u[n]$, $n < 0$, womit sich gerader und ungerader Anteil gegenseitig festlegen. Damit gilt dies wegen

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_g[n] \cos(\Omega n) - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_u[n] \sin(\Omega n)$$

auch für Real- und Imaginärteil von $H(\Omega)$. ■

¹Genauer: Sie sind Hilbert-Transformierte.

²Heißt $h_g[-n] = h_g[n]$ und $h_u[-n] = -h_u[n]$. **Übung:** Wie können diese berechnet werden?

- **Theorem:** $H(z)$ holomorph $\implies |H(\Omega)|$ kann nur isolierte Nullstellen haben.
- **Beweis:** Folgt aus dem Identitätssatz holomorpher Funktionen.³ ■

- **Theorem:** $H(z)$ ist durch $H(\Omega)$ eindeutig bestimmt.
- **Beweis:**
 1. Variante: Über den Identitätssatz wie oben.
 2. Variante: Der Frequenzgang bestimmt eindeutig die Impulsantwort. ■

³ . . . der kurz gesagt nachweist, dass zwei in einem Gebiet G holomorphe Funktionen $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ identisch sind, falls $\{z : f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in G hat, d.h., falls sie in einem „ziemlich kleinen“ Bereich identisch sind.



- 2 Anwendung der DSV in der Nachrichtentechnik
 - Zur Übertragungsfunktion
 - Zur Gruppenlaufzeit
 - Zum Abtasttheorem
 - Zur Faltung
 - Zum Entwurf digitaler Filter
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur



- **Definition:** Der *Frequenzgang* eines LTI-Systems ist⁴

$$H(f) := H(e^{j2\pi f t_s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j2\pi f t_s n}.$$

Betragsgang und *Phasengang* des Systems sind:

$$|H(f)|, \quad \varphi(f) = \arg(H(f)).$$

Durch Ableitung des Phasengangs entsteht die *Gruppenlaufzeit*⁵

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \varphi(f).$$

⁴ . . . damit der Geist nicht einrostet nun mit f anstelle von Ω .

⁵ Je nach Autor auch ohne „-“ definiert. Der Grund für diese Wahl wird im weiteren Verlauf deutlich.

- Betrachtet wird die Übertragung eines Basisbandsignals über einen Kanal mit Mittenfrequenz f_0 (mit Hochmischen etc.)
- Ist das Band schmal, so folgt durch Trennung von Amplitude und Phase⁶ mit reellwertigem $H_r(f)$:

$$H^+(f) = 2H_r(f)e^{j\varphi(f)} \cdot \text{rect}_B(f - f_0)$$

- Approximiert man die Phase durch eine Taylor-Reihe um f_0 gemäß

$$\varphi(f) \approx \varphi(f_0) + (f - f_0) \cdot \left. \frac{d\varphi(f)}{df} \right|_{f=f_0},$$

so folgt

$$H^+(f) \approx 2H_r(f)e^{j\varphi(f_0) - j(f-f_0) \cdot 2\pi\tau_g(f_0)} \cdot \text{rect}_B(f - f_0)$$

⁶Erinnerung: $X^+(f) = 2X(f) \cdot 1\{f > 0\}$ bezeichnet das Spektrum des analytischen Signals.

⁷Folgendes angelehnt an [Kam04].

- Im äquivalenten Tiefpassbereich ergibt sich

$$C(f) = \frac{1}{2}H^+(f + f_0) \approx H_r(f + f_0)e^{j\varphi(f_0) - jf \cdot 2\pi\tau_g(f_0)} \text{rect}_B(f)$$

- Hieraus folgt das Empfangssignal im Tiefpassbereich⁸

$$\begin{aligned} V(f) &= U(f) \cdot H_r(f + f_0)e^{j\varphi(f_0) - j2\pi f\tau_g(f_0)} \text{rect}_B(f) \\ &= \tilde{U}(f)e^{j\varphi(f_0)} e^{-j2\pi f\tau_g(f_0)} \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{U}(f) = U(f) \cdot H_r(f + f_0) \cdot \text{rect}_B(f)$$

⁸Abkürzend bezeichne $v(t)$ das zu $y(t)$ gehörige Signal im Basisband.

- Mit der Definition der *Phasengeschwindigkeit*⁹

$$\tau_p(f) := -\frac{\varphi(f)}{2\pi f}$$

ergibt sich das Zeitsignal im Basisband

$$v(t) = e^{-j2\pi f_0 \tau_p(f_0)} \tilde{u}(t - \tau_g(f_0))$$

und daraus im Bandpassbereich:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ v(t) e^{j2\pi f_0 t} \} \\ &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{u}(t - \tau_g(f_0)) e^{j2\pi f_0 (t - \tau_p(f_0))} \right\} \end{aligned}$$

⁹ . . . deren Sinn bald deutlich wird . . .

■ Folgerungen:

- Die Gruppenlaufzeit gibt an, um welche Zeit das Basisbandsignal bei einer Übertragung verzögert wird.
- Die Phasenlaufzeit gibt an, um welche Zeit die Trägerschwingung verzögert wird.
- Ist die Gruppenlaufzeit konstant, so sind Gruppenlaufzeit und Phasenlaufzeit identisch.

- Ist das Sendesignal nicht schmalbandig, so kann man es sich in Frequenz-Pakete zerlegt denken, die jeweils schmalbandig sind. Für jeden dieser Anteile kann obige Betrachtungen durchgeführt werden. Ist also die Gruppenlaufzeit über dem Signalband nicht konstant, so werden Signalanteile verschiedener Frequenzen unterschiedlich verzögert und damit der Puls verzerrt.
⇒ Untersuche, wann konstante Gruppenlaufzeit besteht¹⁰

¹⁰Übung: Welche Lösungen lassen sich aufgrund der Eigenschaften der Fourier-Transformation erwarten?



- **Theorem:** Ein FIR-System mit Impulsantwort $h[0], \dots, h[K-1]$ besitzt eine lineare Phase, falls die Impulsantwort symmetrisch ($h[K-1-n] = h[n]$) oder anti-symmetrisch ($h[K-1-n] = -h[n]$) ist.
- **Beweis:**¹¹ 1. Soll die Phase linear sein, $\varphi(\Omega) = \alpha\Omega$, so ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{K-1} h[n]e^{-j\Omega n} = \pm |H(\Omega)|e^{j\alpha\Omega}$$

Teilt man auf beiden Seiten Imaginär- durch Realteil so folgt:

$$\frac{-\sum_{n=0}^{K-1} h[n] \sin(\Omega n)}{\sum_{n=0}^{K-1} h[n] \cos(\Omega n)} = \frac{\sin(\alpha\Omega)}{\cos(\alpha\Omega)}$$

¹¹Nach [RG75]

- **Beweis: (ctd.)** Ist $\alpha \neq 0$, so ergibt sich durch Ausmultiplizieren (**Übung**)

$$\sum_{n=0}^{K-1} h[n] \cdot (\sin(\Omega n) \cos(\alpha \Omega) + \cos(\Omega n) \sin(\alpha \Omega)) = 0$$

und damit

$$\sum_{n=0}^{K-1} h[n] \sin((n + \alpha)\Omega) = 0.$$

Eine Lösung¹² ist durch $\alpha = -(K - 1)/2$ und $h[n] = h[K - 1 - n]$ gegeben.¹³ Ist K ungerade, so ist $\alpha \in \mathbb{Z}$, das Symmetriezentrum liegt in einem Sample; für gerade K ist $\alpha \notin \mathbb{Z}$, das Symmetriezentrum liegt zwischen zwei Samples.

¹²Bedenke: $\sin()$ ist punktsymmetrisch.

¹³Zudem folgt aus den Betrachtungen, dass zu jedem K nur ein zulässiges α existiert.

- **Beweis: (ctd.)** 2. Erlaubt man¹⁴ $\varphi(\Omega) = \alpha\Omega + \beta$, so folgt

$$\sum_{n=0}^{K-1} h[n]e^{-j\Omega n} = \pm |H(\Omega)|e^{j(\alpha\Omega + \beta)}.$$

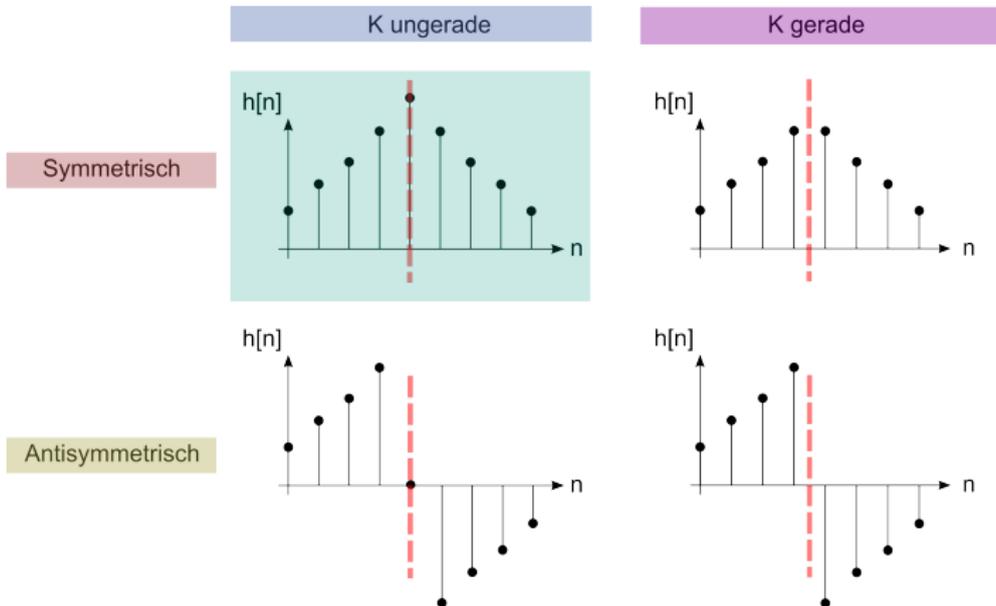
Erneutes Vereinfachen wie in 1. liefert (**Übung**):

$$\sum_{n=0}^{K-1} h[n] \sin((\Omega + \alpha)n + \beta) = 0$$

Die Lösungen sind $\beta = \pm\pi/2$ (um einen Cosinus zu erzeugen),
 $\alpha = -(K - 1)/2$ und $h[n] = -h[K - 1 - n]$. Obige Diskussion bzgl. des
Symmetriezentrums gilt analog. ■

¹⁴Nicht mehr linear, sondern affin; Phasenlaufzeit \neq Gruppenlaufzeit

- Illustration der vier möglichen FIR-Filter mit linearer Phase und deren Symmetriezentren



■ Bemerkungen:

- Linearphasigkeit bei K ungerade $\implies \tau_g(\Omega) = (K - 1)/2 \in \mathbb{N}$.
- Linearphasigkeit bei K gerade $\implies \tau_g(\Omega) = (K - 1)/2 \notin \mathbb{N}$. Dies ist ein „Zwischensample“ (fractional delay).
- Für gerade Symmetrie sind Gruppenlaufzeit und Phasenlaufzeit konstant und identisch; bei ungerader Symmetrie sind sie nicht gleich [RG75].

Wird ein linearphasiges FIR-Filter mit einem Impuls angeregt, so ist der Impuls nach dem Filter um die Gruppenlaufzeit verzögert.

- Betrachtet man die Kombination von Sende- und Empfangsfilter, so hat diese insgesamt die Verzögerung $2 \cdot (K - 1)/2$, was stets „auf“ einem Sample liegt.

■ Diskussion:

- Nun gelernt: Symmetrische FIR-Systeme besitzen einen linearen Phasengang
- Offensichtlich: FIR-Systeme sind stets stabil¹⁵
- Literatur¹⁶: FIR-System weniger anfällig für Quantisierungseinflüsse („Grenzyklen“, Auswirkungen „falscher“ Koeffizienten durch endliche Wortlänge)
- Realisierung leicht erhöhter Ordnung¹⁷ heute nicht weiter tragisch.

Im Allgemeinen sind in der Nachrichtentechnik FIR-Systeme dominant.

¹⁵Nachweis: **Übung**

¹⁶Siehe [KK98]

¹⁷IIR könnten steilere Flanken mit geringerer Filterordnung realisieren. (Anschauung?)

- 2 Anwendung der DSV in der Nachrichtentechnik
 - Zur Übertragungsfunktion
 - Zur Gruppenlaufzeit
 - **Zum Abtasttheorem**
 - Zur Faltung
 - Zum Entwurf digitaler Filter
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur



Theorem

Falls die stetige L_1 -Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auf $[-W, W]$ bandbegrenzt ist, d.h. $X(f) = 0, |f| \geq W$, dann wird $x(t)$ durch Abtastwerte der Rate $2W$, entsprechend einer Abtastzeit von $t_s = 1/(2W)$ vollständig beschrieben. Das Signal kann über

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \text{si}(\pi \cdot 2W \cdot (t - nt_s))$$

mit Samples $x[n] := x(nt_s)$ rekonstruiert werden.

- **Problem:** Abtasttheorem empfindlich gegenüber Verletzungen der Bandbegrenzung und deren Effekt (\rightarrow Aliasing) \implies Steiflankige analoge Filter notwendig
- **Idee:** Sample mit höherer Abtastfrequenz falls möglich \implies Beseitigen der Probleme in der digitalen Welt
- **Definition:** *Oversampling* beschreibt Abtastung mit Abtastfrequenz $f'_s = K f_s$, wobei f_s die Shannon'sche Abtastfrequenz ist; $1 < K \in \mathbb{N}$ heißt *oversampling Faktor*.¹⁸

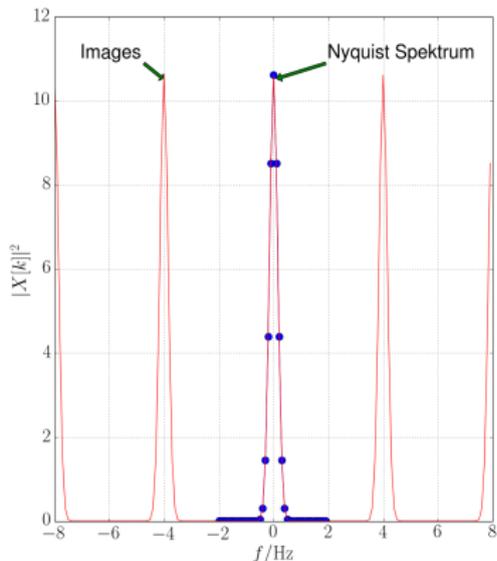
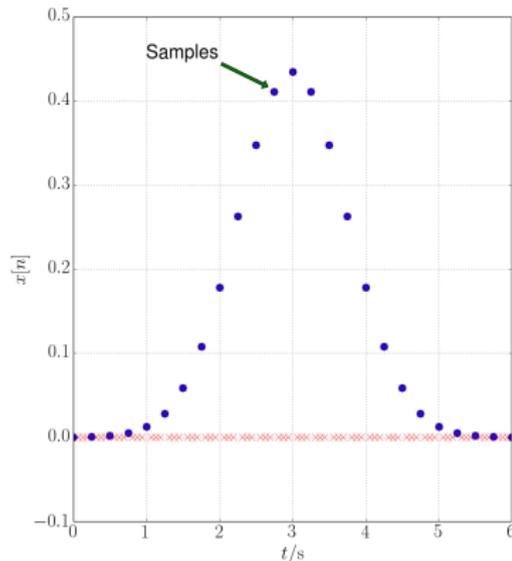
¹⁸ $K \in \mathbb{Q}$ ist ebenfalls möglich.



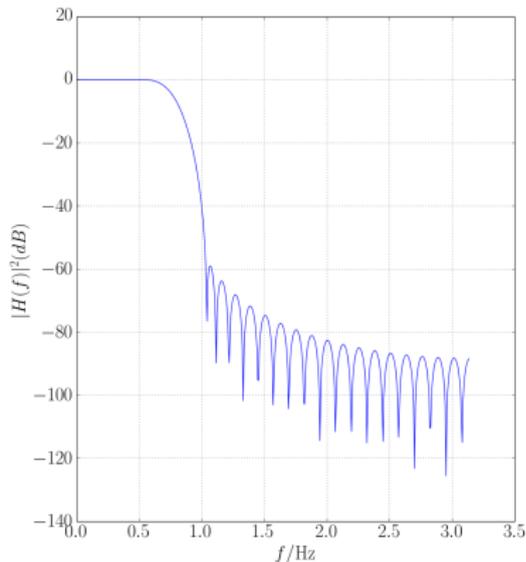
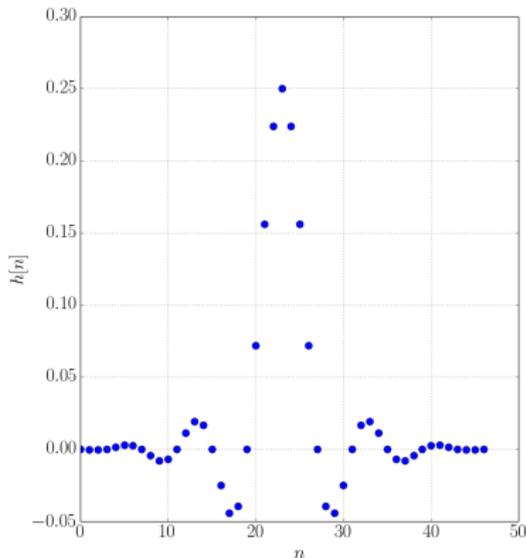
- **Frage:** Angenommen ein zeitdiskretes Signal $x[n] = x(nt_s)$ ist gegeben. Wie erhält man Werte an Zwischenstellen, z.B. $x(nt_s + t_s/2)$?
- **Lösung (theoretisch):** Falls das Abtasttheorem für t_s erfüllt ist, kann das Originalsignal $x(t)$ rekonstruiert und anschließend neu abgetastet werden.
- **Lösung (praktisch):** Angenommen die gewünschte Abtastfrequenz ist $f'_s = K f_s$, dann erreicht man Interpolation durch
 - äquidistantes Einsetzen von nullen zwischen bisherigen Samples,
 - zeitdiskretes Filtern um *Images (Spiegelspektren)*, sprich unerwünschte Wiederholungen des Originalspektrums, zu beseitigen, was letztlich zum Originalspektrum im "neuen" Nyquistband führt.

Die Filterung entspricht einer *Interpolation* zwischen den bisherigen Samples.

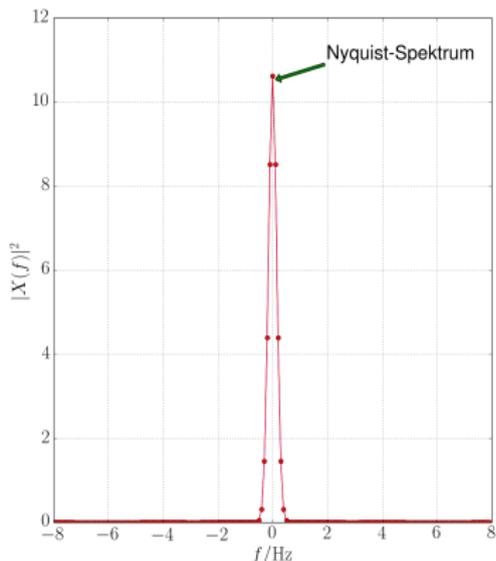
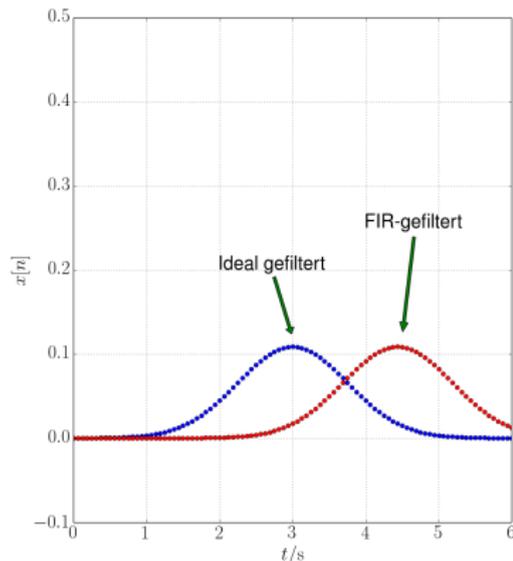
- **Beispiel:** Upsampling um $K = 4$ bei $t_s = 0.25$ s



- **Beispiel:** Upsampling um $K = 4$ bei $t_s = 0.25$ s; Image-Filter der Länge 47



- **Beispiel:** Upsampling um $K = 4$ bei $t_s = 0.25$ s; Ergebnis der Filterung



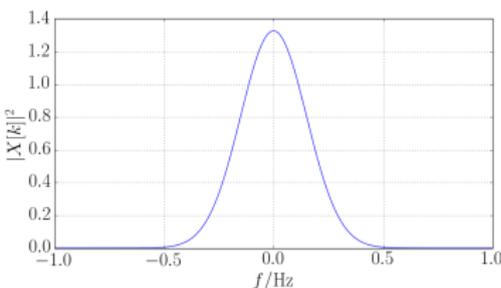
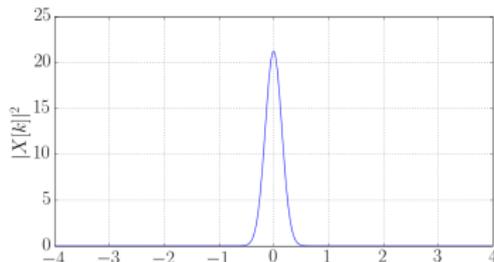
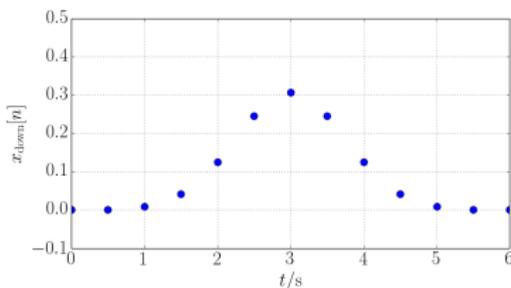
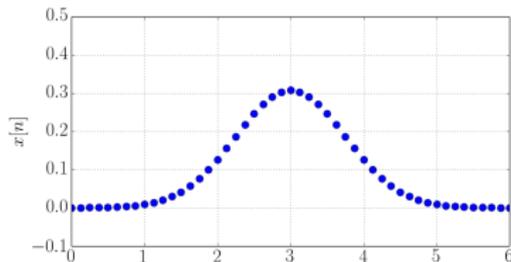
- In Analogie zum Upsampling besteht ein *Downsampling* darin, nur jeden K -ten Wert eines Signals zu verwenden, d. h. die Abtastrate um den Faktor K zu verringern.

$$x[n] \mapsto x[n'] = x[nK]$$

- Dies ist möglich, falls hierdurch keine Frequenzanteile überlagern bzw. Information verloren geht¹⁹.
- Ist das Nyquistband vor Downsampling $[-f_s/2, f_s/2]$, so muss $X(f) = 0$ für $f_s/(2K) < |f| < f_s/2$ gelten, damit durch Downsampling keine Fehler entstehen.

¹⁹da sie durch die geringere Abtastfrequenz nicht erfasst werden kann

- **Beispiel:** Downsampling um $K = 4$ bei $t_s = 0.125$ s



- 2 Anwendung der DSV in der Nachrichtentechnik
 - Zur Übertragungsfunktion
 - Zur Gruppenlaufzeit
 - Zum Abtasttheorem
 - **Zur Faltung**
 - Zum Entwurf digitaler Filter
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur



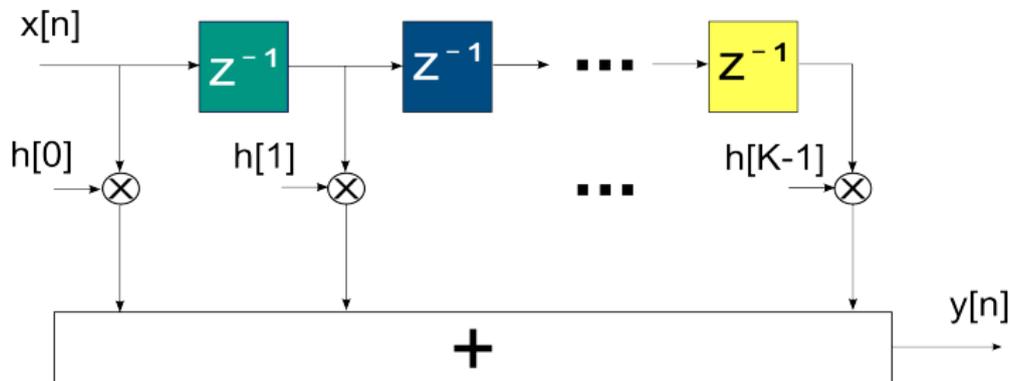
- **Definition:** Die *Faltung* zwischen zwei Folgen $x[n]$ und $h[n]$ ist definiert als

$$x[n] * h[n] := \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- **Bemerkungen:**

- Praktisch haben die beteiligten Folgen fast immer endliche Länge.
- Bedenken Sie, dass sich die Sequenzlänge durch Faltung erhöht.
- Oft ist Matrix-Vektor-Schreibweise mathematisch einfacher
⇒ Suche Darstellung der Faltung in Matrix-Vektor-Form

- Für ein kausales FIR-System folgt die Darstellung als Moving Average, MA:



- Die Register sind am Anfang und am Ende nicht vollständig belegt;
Einschwingen und *Ausschwingen* des Filters²⁰

Einschwingen

L-1, ..., 3, 2, 1, 0	-	-	-
L-1, ..., 3, 2, 1	0	-	-
L-1, ..., 3, 2	1	0	-
L-1, ..., 3	2	1	0

Ausschwingen

L-1	L-2	L-3	L+K-5, ...
-	L-1	L-2	L+K-4, L+K-5, ...
-	-	L-1	L+K-3, L+K-4, ...
-	-	-	L+K-2, L+K-3, ...

²⁰Zur Vereinfachung sind nur die Zeitindizes aufgeführt.

- Besitzen $x[n]$ resp. $h[n]$ die Länge L resp. K , so folgt die Faltung zu:

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ \vdots \\ y[L+K-2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h[0] & 0 & & 0 \\ h[1] & h[0] & & \\ \vdots & h[1] & \ddots & \\ h[K-1] & \vdots & & h[0] \\ & h[K-1] & & h[1] \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & h[K-1] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[L-1] \end{pmatrix}$$

und somit

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{L+K-1}, \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{(L+K-1) \times L}, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^L$$

Die Matrix \mathbf{H} heißt *Faltungsmatrix*.

■ Bemerkungen:

- Die Matrix-Vektor-Form stellt die Faltung als lineare Operation auf Vektoren dar. Somit können – basierend auf diesem linearen Modell – Schätzaufgaben wie etwa eine MMSE-Schätzung formuliert werden.
- Unter Umständen ist es sinnvoll, die Rollen von $x[n]$ und $h[n]$ zu vertauschen. Demnach ergäbe sich die Darstellung $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{h}$.
- Erfolgt eine Faltung von $x[n], n = 0, \dots, L - 1$ mit $h[n], n = 0, \dots, K - 1$ und anschließend mit $g[n], n = 0 \dots, M - 1$, so hat das Ausgangssignal Länge $L + K + M - 2$. Dies wird beschreibbar durch

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{x}, \quad \mathbf{G} \in \mathbb{C}^{(L+M+K-2) \times (L+K-1)}, \quad \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{(L+K-1) \times L}.$$

Die Hintereinanderausführung (Faltung) zweier Filter entsteht also im „Matrix-Bereich“ durch Multiplikation der Faltungsmatrizen.²¹

²¹ Nachweis: Übung

- Soll (wie z.B. zum optimalen Empfang in AWGN) ein Matched Filter realisiert werden, so besitzt dieses (diskret) die Impulsantwort $h_{\text{mf}}[n] = h^*[K - 1 - n]$.
- Filterung des Empfangssignals über MF kann damit beschrieben werden als

$$\mathbf{y}_{\text{mf}} = \mathbf{H}_{\text{mf}}\mathbf{y} = \mathbf{H}_{\text{mf}}\mathbf{H}\mathbf{x}$$

- Bedenken Sie, dass jedes Filter eine Verzögerung verursacht. Der „zu $x[0]$ passende Wert nach Pulsformung und MF“ befindet sich an der Stelle $y_{\text{mf}}[K - 1]$.



- **Beispiel:** Untersuche ein System mit $K = 3, L = 3$. Es folgt $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{5 \times 3}$ und²² $\mathbf{H}_{\text{mf}} \in \mathbb{C}^{7 \times 5}$. Durch Multiplikation folgt für den Ausgang des MF²³:

$$\mathbf{H}_{\text{mf}}\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_0 h_2^* & 0 & 0 \\ h_0 h_1^* + h_1 h_2^* & h_0 h_2^* & 0 \\ \|\mathbf{h}\|^2 & h_0 h_1^* + h_1 h_2^* & h_0 h_2^* \\ h_1 h_0^* + h_2 h_1^* & \|\mathbf{h}\|^2 & h_0 h_1^* + h_1 h_2^* \\ h_2 h_0^* & h_1 h_0^* + h_2 h_1^* & \|\mathbf{h}\|^2 \\ 0 & h_2 h_0^* & h_1 h_0^* + h_2 h_1^* \\ 0 & 0 & h_2 h_0^* \end{pmatrix}$$

²²Verlängerung durch Filterung

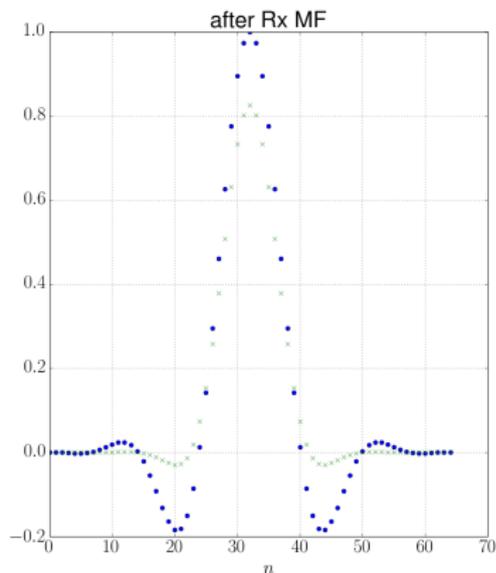
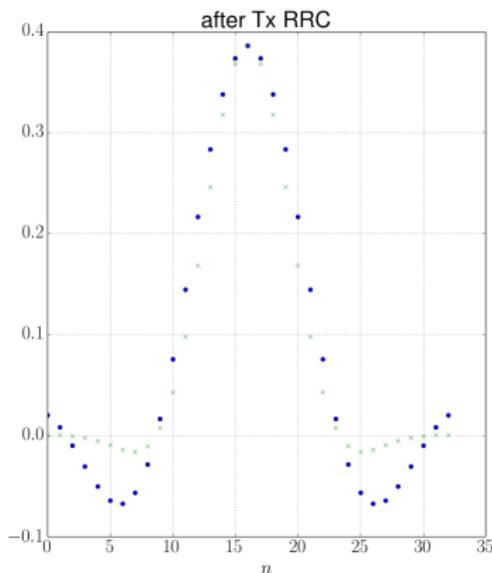
²³Ausnahmsweise aus Platzgründen in der Schreibweise $h_i := h[i]$.

- **Beispiel: (ctd.)** Bildet man andererseits $\mathbf{H}^H \mathbf{H} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^H \mathbf{H} &= \begin{pmatrix} h_0^* & h_1^* & h_2^* & 0 & 0 \\ 0 & h_0^* & h_1^* & h_2^* & 0 \\ 0 & 0 & h_0^* & h_1^* & h_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 \\ 0 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|\mathbf{h}\|^2 & h_0 h_1^* + h_1 h_2^* & h_0 h_2^* \\ h_1 h_0^* + h_2 h_1^* & \|\mathbf{h}\|^2 & h_0 h_1^* + h_1 h_2^* \\ h_2 h_0^* & h_1 h_0^* + h_2 h_1^* & \|\mathbf{h}\|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

→ **Diskussion:** Was fällt auf? Begründung?

- **Beispiel:** RRC-Filter der Länge 33 und Matched-Filter am Empfänger²⁴



²⁴ **Frage/Übung:** Worin besteht der Unterschied der beiden Kurven?

- **Frage:** Wie kann die Faltung effizient berechnet werden?
- **Idee:** Faltung wird im Frequenzbereich zu einfacher Multiplikation \implies

$$y[n] = \mathcal{F}^{-1} \{X(f) \cdot H(f)\}$$

Ist $H(f)$ über längere Zeit konstant, so kann man dies vorab berechnen.

- **Definition:** Eine *schnelle Faltung* berechnet die FFTs, multipliziert diese und berechnet anschließend die IFFT.

- **Frage:** Welche Probleme/Besonderheiten ergeben sich?
- **(Halb-)Antwort:** Bedenke, dass Folgen bei Verwendung der FFT implizit periodisch sind
- Werden zu faltende Folgen $x[n]$ und $h[n]$ der Längen L bzw. K mit der Periode $N \geq \max\{L, K\}$ periodisch fortgesetzt²⁵, so wird die Faltung zu einer *zyklischen Faltung*^{26 27}:

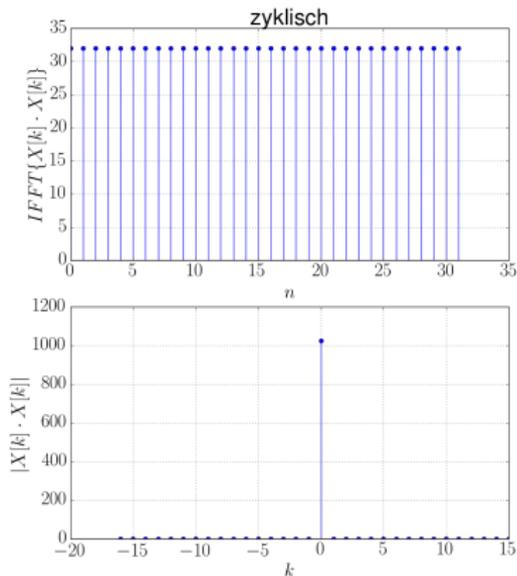
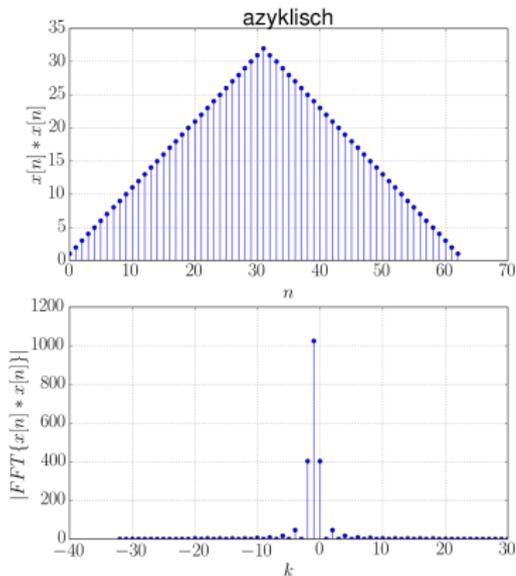
$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \cdot x[n - k \bmod N]$$

²⁵ Manche der Koeffizienten werden in der periodischen Fortsetzung zu 0.

²⁶ Auch als zirkuläre oder periodische Faltung bezeichnet.

²⁷ **Frage:** Wie kann die azyklische Faltung aus einem Algorithmus der zyklischen Faltung berechnet werden?

■ Beispiel: Faltung eines Rechtecks der Länge 32



- Die Faltungsmatrix der zyklischen Faltung mit $\mathbf{h} = (h[0], \dots, h[K - 1])$ ist eine zirkuläre Matrix²⁸ der Form²⁹

$$\text{Zykl}(\mathbf{h}) := \begin{pmatrix} h[0] & h[K - 1] & \cdots & h[1] \\ h[1] & h[0] & \cdots & h[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[K - 1] & h[K - 2] & \cdots & h[0] \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\mathbf{y} = \text{Zykl}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{x}$$

²⁸Folgendes nach [Kle76].

²⁹Ist die Eingangsfolge deutlich länger, so ergeben sich in der Matrix $\text{Zykl}(\mathbf{h})$ noch nullen, bevor die Zeilen „von rechts“ aufgefüllt werden. Damit hat $\text{Zykl}(\mathbf{h})$ Bandstruktur mit „gefüllter oberer rechter Ecke“.

- Mit der Fouriermatrix $\mathbf{F} := \mathbf{A}_{\text{DFT}} = (e^{-j2\pi kn/N})_{kn}$ wird eine zirkuläre Matrix diagonalisiert: (**Übung:** Nachrechnen)

$$\mathbf{F} \cdot \text{Zykl}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{F}^{-1} = \text{diag}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{h})$$

$$\text{Zykl}(\mathbf{h}) = \mathbf{F}^{-1} \cdot \text{diag}(\mathbf{F}\mathbf{h}) \cdot \mathbf{F}.$$

Eigenwerte sind die DFT-Koeffizienten von \mathbf{h} .



- Entsteht \mathbf{y} durch zyklische Faltung $\mathbf{y} = \text{Zykl}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{x}$, so gilt mit den Definitionen $\mathbf{Y} := \mathbf{F}\mathbf{y}$, $\mathbf{X} := \mathbf{F}\mathbf{x}$, $\mathbf{H} := \mathbf{F}\mathbf{h}$ der Zusammenhang

$$\mathbf{Y} = \text{diag}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{X}$$

- **Diskussion:**

- Welche Bedeutung hat das?
- Wo haben Sie einen solchen (oder ähnlichen) Zusammenhang bereits gesehen?



- **Bisher:** Faltung der Eingangsfolge $x[0], \dots, x[L - 1]$ mit der Impulsantwort $h[0], \dots, h[K - 1]$
- Verwendung der DFT – inkl. Zero-Padding auf richtige Länge – zur *schnellen Faltung* zweier Zeitfolgen
- **Meist:** Eingangsfolge $x[n]$ deutlich länger als Impulsantwort $h[n]$, d. h. $L \gg K$ (Welche Konsequenzen hat dies für die Faltungsmatrix?)
- **Folgen/Nachteile:**
 - Einfügen vieler Nullen
 - „Langes“ Warten bis Block aufgefüllt, obwohl Werte berechnet werden könnten
- **Lösung:** *Segmentierte Faltung*³⁰

³⁰Folgendes nach [KK98].

Und nochmal die Faltung...

- Zerlegen der Eingangsfolge in Segmente der Länge L_S liefert $R = L/L_S$ Segmente (Annahme: L ist ein Vielfaches von L_S):

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n], & iL_S \leq n < (i+1)L_S \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Faltung von $x_i[n]$ mit $h[n]$ hat die Länge $L_S + K - 1$:

$$y_i[n] = \begin{cases} x_i[n] * h[n], & iL_S \leq n < (i+1)L_S + K \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Gesamtsystemantwort ergibt sich durch Überlagerung

$$y[n] = \sum_{i=0}^{R-1} y_i[n].$$

Da sich die Ausgangssegmente überlappen, heißt die Methode *overlap-add-Methode*.

■ Bemerkungen: (aus [KK98])

- Teilfaltungen aus Aufwandsgründen mittels schneller Faltung (hierbei Auffüllen von $x[n]$ und $h[n]$ auf $L_S + K - 1$ Werte),
- Bei langsamer Änderung der Impulsantwort kann $H[k], k = 0, \dots, L_S + K - 1$ im Voraus berechnet werden
- Overlap-add ist für $L_S + K - 1 = 2^p$ schneller, falls $K > 2^p$ gilt. Es ist jedoch zu beachten, dass die Operationen zur Bildung der Faltung oft in Signalprozessoren sehr effizient ausgeführt werden können.
- Faltung ist im Vergleich zur FFT weniger empfindlich gegen Quantisierungsfehler

- 2 Anwendung der DSV in der Nachrichtentechnik
 - Zur Übertragungsfunktion
 - Zur Gruppenlaufzeit
 - Zum Abtasttheorem
 - Zur Faltung
 - **Zum Entwurf digitaler Filter**
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur



- **Erinnerung:** Der Frequenzgang linearphasiger FIR-Filter lautet jeweils

$$H(\Omega) = H_r(\Omega)e^{-j\frac{K-1}{2}\Omega}$$

mit $H_r(\Omega)$, das sich geschlossen in Abhängigkeit von $h[n]$ und unter Ausnutzung der Symmetrie darstellen lässt, und das entweder rein reell oder rein komplex ist.

- Die folgenden Betrachtungen beschränken sich auf den Entwurf linearphasiger FIR-Filter. Bei Interesse am Entwurf analoger Filter oder von IIR-Filtern sei auf [PKJ11] und/oder [KK98] verwiesen.



- Bei linearphasigen Systemen ergibt sich für den Frequenzgang:³¹

$$H_{r,uL-s}(\Omega) = h \left[\frac{K-1}{2} \right] + 2 \sum_{k=0}^{\frac{K-1}{2}-1} h[k] \cos \left(\left(\frac{K-1}{2} - k \right) \Omega \right)$$

$$H_{r,gL-s}(\Omega) = 2 \sum_{k=0}^{\frac{K}{2}-1} h[k] \cos \left(\left(\frac{K-1}{2} - k \right) \Omega \right)$$

$$H_{r,uL-a}(\Omega) = 2j \sum_{k=0}^{\frac{K-1}{2}-1} h[k] \sin \left(\left(\frac{K-1}{2} - k \right) \Omega \right)$$

$$H_{r,gL-a}(\Omega) = 2j \sum_{k=0}^{\frac{K}{2}-1} h[k] \sin \left(\left(\frac{K-1}{2} - k \right) \Omega \right)$$

³¹ Abkürzungen: uL = ungerade Länge, gL = gerade Länge; s = symmetrisch, a = antisymmetrisch



■ Eigenschaften:

- $H_r(\Omega)$ ist eine reelle oder rein imaginäre Funktion in Ω , die wegen $|H(\Omega)| = |H_r(\Omega)|$ den Betragsgang von $H(\Omega)$ bestimmt.
- Für antisymmetrisches $h[n]$ ergibt sich $\varphi(0) = 0$.
- Die Betragsgänge erfüllen:

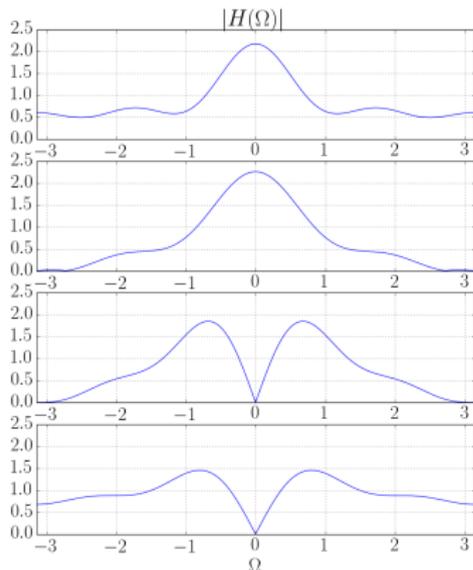
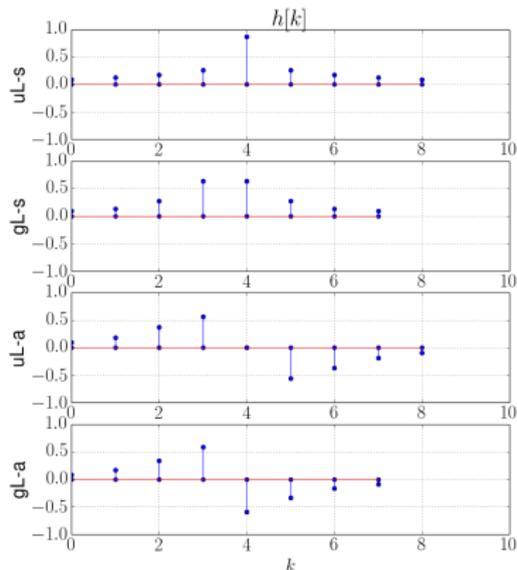
$$|H_{r,gL-s}(\pi)| = 0$$

$$|H_{r,uL-a}(0)| = 0, \quad |H_{r,uL-a}(\pi)| = 0$$

$$|H_{r,gL-a}(0)| = 0$$

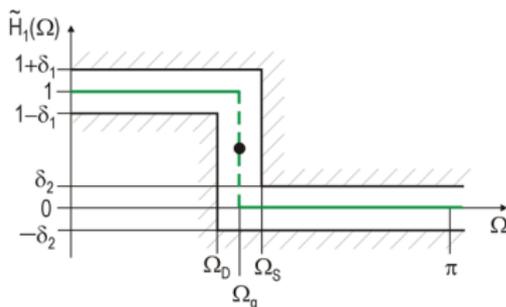
Ein uL-s-System kann beliebige endliche Werte für $\Omega = 0$ und $\Omega = \pi$ besitzen.

■ Beispiel: Impulsantworten linearphasiger FIR-Filter und Betragsgänge



■ Aufgabe:

- Ein reellwertiges linearphasiges (Wunsch-)Filter wird durch $H_w(\Omega)$ auf $[0, \pi]$ beschrieben (Symmetrie!), wobei $H_w(\Omega)$ den Wunsch-Frequenzgang beschreibt.
- Finde Impulsantwort $h[n]$, die „bestmöglich“ diesen Frequenzgang besitzt
- Da nur endliche Filterlängen betrachtet werden, kann kein idealer Verlauf erreicht werden \implies Abweichungen, *Toleranzschema*^{32 33}



³² Beispiel anhand eines Toleranzschemas für einen Tiefpass.

³³ **Frage:** Wieso sieht dies anders aus als in SuS beim Entwurf analoger Filter?

■ Ansatz:³⁴

- Minimaler quadratischer Approximationsfehler zwischen $H_w(\Omega)$ und $H(\Omega)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| H_w(\Omega) - \sum_{n=0}^{K-1} h[n] e^{-j\Omega n} \right|^2 d\Omega \stackrel{!}{=} \min_{h[0], \dots, h[K-1]}$$

- Für $h[n]$ reell und $H_w(\Omega)$ gerade folgt³⁵:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_w(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

bzw.

$$h[n] = t_s \int_{-1/(2t_s)}^{1/(2t_s)} H_w(f) e^{j2\pi f t_s n} df$$

³⁴Nach [KK98].

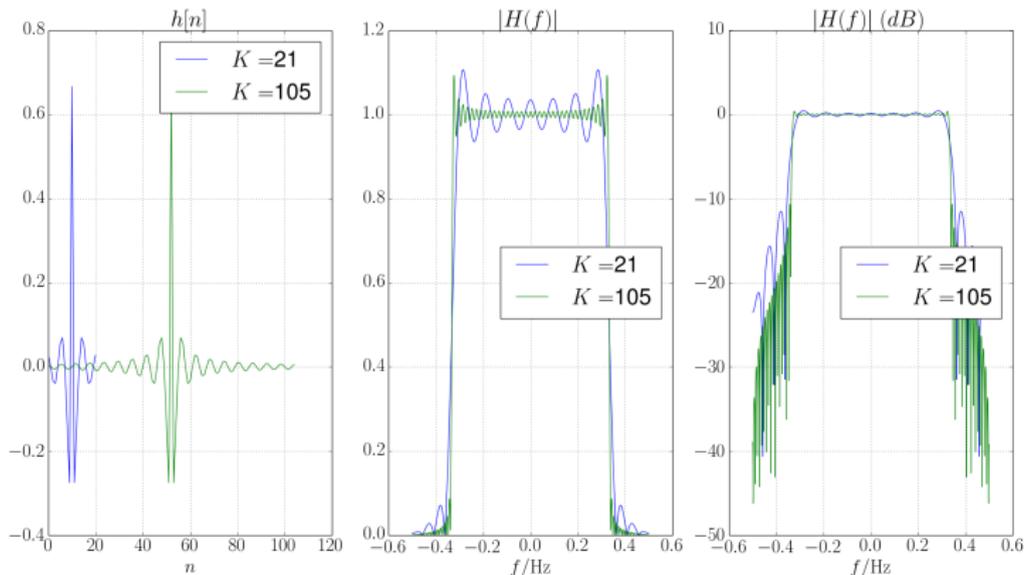
³⁵Nachweis: Übung

Theorem

Zur bestmöglichen Approximation eines Frequenzgangs im Sinne der quadratischen Abweichung ergibt sich die Impulsantwort als IDTFT des gesuchten Frequenzgangs.



- **Beispiel:** Entwurf eines Tiefpass bei $t_s = 1$ s mit Grenzfrequenz $2f_s/3$ bei $K = 21$ und $K = 105$



■ Bemerkungen:

- Da $H_w(\Omega)$ 2π -periodisch ist, liegt Approximation durch trigonometrische Funktionen nahe.
- Faustregel³⁶ zur Schätzung der Ordnung K :

$$K \approx D(\delta_1, \delta_2) \frac{\pi}{\Omega_S - \Omega_D}$$

- Führe Entwurf durch und prüfe, ob das Toleranzschema eingehalten wird. Falls nicht, muss die Filterordnung erhöht werden.
- Aufgrund Orthogonalität der Exponentialfunktionen beeinflussen sich die Werte $h[n]$ nicht gegenseitig, müssen somit bei Erhöhen der Ordnung nicht neu berechnet werden.

³⁶Nach [Schu73]; dort finden sich Angaben zur Wahl von $D(\delta_1, \delta_2)$.

■ Bemerkungen: (ctd.)

- Aus der Fourier-Theorie folgt, dass die Approximation mit wachsender Ordnung „fast überall“ gegen $H_w(\Omega)$ konvergiert, falls $H_w(\Omega)$ eine stückweise stetige Funktion ist.³⁷
- Die Begrenzung der Impulsantwort auf $0, \dots, K - 1$ entspricht einer Fensterung mit einem Rechteckfenster. Das Spektrum wird somit mit der sinc-Funktion gefaltet. Günstigeres Verhalten kann durch Verwendung eines „gutmütigeren“ Fensters erreicht werden. Siehe [KK98, PKJ11].

³⁷Übung: Wieso nur fast? Kennen Sie eine diesbzgl. Aussage?



- **Ansatz:**³⁸ *Tschebyscheff-Approximation*: Minimiere maximalen Fehler gemäß

$$\min_{h[0], \dots, h[K-1]} \max_{\Omega \in A} E(\Omega),$$

wobei

- $E(\Omega) := |W(\Omega) \cdot (D(\Omega) - H_r(\Omega))|$ die gewichtete Fehlerfunktion beschreibt;
- A die Menge der „interessanten“ Frequenzen ist, für welche die Approximationsgüte vorgegeben wird;
- $W(\Omega)$ eine Gewichtsfunktion ist, welche die Schwere von Approximationsfehlern bewertet;
- $H_w(\Omega)$ der gewünschte reellwertige Frequenzgang ist.

³⁸Folgendes nach [RG75]; Darstellung liefert hier nur einen groben Überblick.

- **Theorem: (Alternantentheorem)** Sei $P(\Omega) = \sum_{n=0}^{K-1} a_n \cos(\Omega n)$ ein trigonometrisches Polynom, das im Tschebyscheff-Sinne bestmöglich eine stetige Funktion $\tilde{D}(\Omega)$ auf der kompakten Menge $A \subseteq [0, \pi]$ approximieren soll.

Für die eindeutige und optimale Approximation ist es notwendig und hinreichend, dass $K + 1$ Frequenzen $\Omega_1 < \dots < \Omega_{K+1}$ existieren, für die $E(\Omega_i) = -E(\Omega_{i+1})$ und $|E(\Omega_i)| = \max_{\Omega \in A} |E(\Omega)|$ gilt.



■ Algorithmus: (Über nichtlineare Gleichungen)³⁹

- Umformulieren des Problems, so dass das Alternantentheorem angewendet werden kann
- Aufstellen von Gleichungen für ebenso viele Unbekannte
 - Gleichungen: Fehlerfunktion an Extremstellen hat Werte $\pm\delta$; Ableitung gleich Null
 - Unbekannte: Frequenzen des Alternantentheorem; Koeffizienten der Impulsantwort
- Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems liefert die gesuchte Impulsantwort

³⁹Für das Folgende wird nur die grobe Idee wiedergegeben; für Details siehe [RG75].

■ Algorithmus: (Über Remez-Entwurf)

- Umformulieren des Problems, so dass das Alternantentheorem angewendet werden kann
- Anwendung des Remez-Algorithmus zur Bestimmung der Ω_i
- Lösen eines linearen Gleichungssystems (etwa über IFFT an den Stützstellen) liefert die gesuchte Impulsantwort

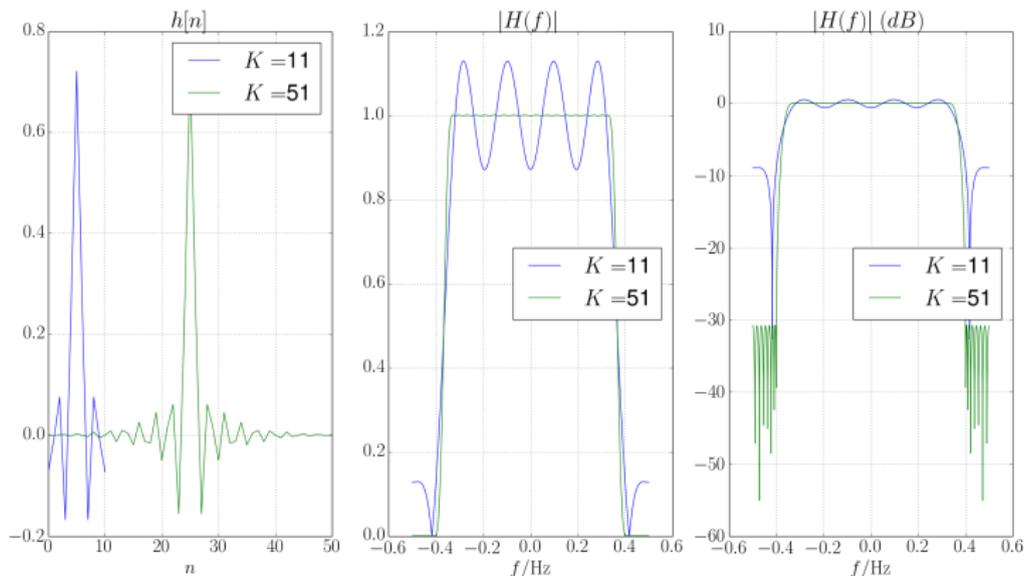
■ Algorithmus: (Remez-Entwurf nach Parks-McClellan)⁴⁰

- 1 Anfangsschätzung von $K + 1$ Stellen Ω_i (etwa gleichverteilt auf A)
- 2 Berechne einen Parameter δ nach gegebener Formel
- 3 Interpoliere $P(\Omega)$ (etwa durch Lagrange-Interpolation)
- 4 Berechne Fehlerfunktion $E(\Omega)$ und bestimme Extrema mit $|E(\Omega)| \geq \delta$.
- 5 Mehr als $K + 1$ Extrema \implies Wähle die größten $K + 1$ Extrema aus
- 6 Falls sich die Extremalpunkte geändert haben, gehe zum zweiten Schritt zurück. Andernfalls gib die Frequenzen aus.

⁴⁰In der Fassung nach [RG75]; hier gibt es auch andere Formulierungen.



- **Beispiel:** Entwurf eines Tiefpass bei $t_s = 1$ s mit Grenzfrequenz $2f_s/3$ bei $K = 11$ und $K = 21$



- 2 Anwendung der DSV in der Nachrichtentechnik
 - Zur Übertragungsfunktion
 - Zur Gruppenlaufzeit
 - Zum Abtasttheorem
 - Zur Faltung
 - Zum Entwurf digitaler Filter
 - **Lernzielkontrolle**
 - Literatur



- Die folgende Aufstellung fasst die zentralen Punkte zusammen.
- Es wird aufgezeigt, welche Punkte nach Bearbeitung des Kapitels klar sein sollten.
- **Hinweise:**
 - Die Auflistung ist nicht vollständig, sondern führt die wichtigsten Aussagen auf; nicht erwähnte Inhalte sind dennoch bedeutsam.
 - Oft enthalten die Nachweise wichtige Ideen; diese also nicht vernachlässigen.
 - Stets versuchen, Gleichungen in Verbindung mit Interpretationen und Anwendungen zu sehen
 - Des weiteren sollten alle kleinen nützlichen Ergänzungen verstanden sein.
 - Es ist immer eine gute Idee, etwas Gelerntes im Rechner umzusetzen. Dies hilft beim Verständnis und schärft das Bewusstsein für mögliche Probleme.

Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Übertragungsfunktion: Welche Einschränkungen bzw. Freiheiten gibt es?
- Gruppenlaufzeit
 - Bedeutung von Gruppen- und Phasenlaufzeit in Kanälen/Systemen
 - Wann wird Linearphasigkeit erreicht?
 - Warum sind linearphasige FIR-Systeme vorteilhaft?
- Over-, Up- und Downsampling: Was geschieht im Zeit-, was im Frequenzbereich?



Nach diesem Kapitel sollten als zentrale Punkte klar sein:

- Faltung
 - Darstellung als MA-Filter
 - Darstellung in Matrix-Vektor-Notation: Wie geht das und welche Vorteile bietet es? Was geschieht beim MF?
 - Schnelle, zyklische und segmentierte Faltung
- Entwurf digitaler Filter
 - Kenntnis der 4 Arten linearphasiger Filter und deren Eigenschaften
 - Änderung des Toleranzschemas
 - Fourier-Approximation als optimale L_2 -Schätzung; Eigenschaften und Bedeutung von Fensterung
 - Grundidee der Tschebyscheff-Approximation, des Alternantentheorems und des Remez-Entwurfs

- 2 Anwendung der DSV in der Nachrichtentechnik
 - Zur Übertragungsfunktion
 - Zur Gruppenlaufzeit
 - Zum Abtasttheorem
 - Zur Faltung
 - Zum Entwurf digitaler Filter
 - Lernzielkontrolle
 - Literatur



- [Kam04] K.-D. Kammeyer, *Nachrichtenübertragung*, Teubner, 3. Auflage, 2004
- [RG75] L. Rabiner, B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 1975
- [KK98] K.-D. Kammeyer, K. Kroschel, *Digitale Signalverarbeitung*, Teubner, 1998
- [PKJ11] F. Puente Leon, U. Kiencke, H. Jäkel, *Signale und Systeme*, Oldenbourg, 2011
- [Kle76] W. Klein, *Finite Systemtheorie*, Teubner, 1976
- [Pro96] J. Proakis, D. Manolakis, *Digital Signal Processing*, 3rd edition, Prentice Hall, 1996
- [Schu73] H. Schüssler, *Digitale Systeme zur Signalverarbeitung*, Springer, 1973